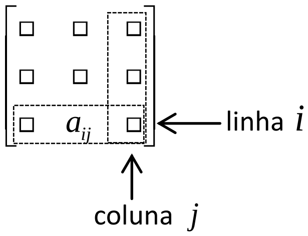
MATRIZES

Denomina-se **matriz** toda tabela retangular de valores dispostos ordenadamente em linhas e colunas. As matrizes são indicadas por letras maiúsculas do alfabeto latino e representadas utilizando-se parênteses ou colchetes.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D=\begin{bmatrix} 8 & 1 & 9 & 0 \\ 6 & 0 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

Um elemento genérico de uma matriz A é simbolizado por a_{ij}, em que i indica a linha e j, a coluna a que o elemento pertence.



Exemplo: Na matriz $A=\begin{bmatrix} 6 & 7 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \\ 5 & 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ temos:

$$\begin{matrix} a_{11}=6, & a_{12}=7, & a_{13}=2, & a_{14}=8 \\ a_{21}=1, & a_{22}=3, & a_{23}=2, & a_{24}=6 \\ a_{31}=5, & a_{32}=5, & a_{33}=7, & a_{34}=8 \end{matrix}$$

Para essa matriz A, constituída por 3 (três) linhas e 4 (quatro) colunas, dizemos que ela é uma matriz de **ordem** 3×4.

Uma matriz genérica de ordem $m\times n$ é representada assim:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

Essa matriz $m\times n$ possui $m\cdot n$ elementos. Podemos também expressá-la de forma mais reduzida, por meio de uma **lei de formação**:

$$\boxed{A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n} \mid \textbf{lei de formação}}$$

Com $i\in\{1,2,3,\ldots,m\}$ e $j\in\{1,2,3,\ldots,n\}$.

Exemplo: Vamos obter os elementos da matriz $B=\left(b_{ij}\right)_{2\times 2} \mid b_{ij}=i+j$.

Solução: Como a matriz tem ordem 2×2, possui duas linhas e duas colunas, ou seja, quatro elementos assim dispostos:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

Cada um dos seus elementos deve ser calculado pela lei de formação:

$$b_{ij} = i + j \Rightarrow \begin{cases} b_{11} = 1+1 = 2 \\ b_{12} = 1+2 = 3 \\ b_{21} = 2+1 = 3 \\ b_{22} = 2+2 = 4 \end{cases}$$

Logo, a matriz é:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

TIPOS DE MATRIZES

Algumas matrizes recebem nomes especiais:

1) **matriz linha**: é toda matriz de ordem $1 \times n \left(n \in \mathbb{N}^* \right)$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}_{1\times n}$$

Exemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}_{1\times 3} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 10 & 9 \end{bmatrix}_{1\times 4}$$

2) **matriz coluna**: é toda matriz de ordem $m \times 1 \left(m \in \mathbb{N}^* \right)$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

Exemplos:

$$M = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}_{3\times 1} \qquad N = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ k \end{bmatrix}_{4\times 1}$$

3) **matriz quadrada**: é toda matriz cujo número de linhas é igual ao número de colunas. Assim, chamamos matriz quadrada de ordem $\boldsymbol{n}$ toda matriz do tipo $n \times n$.

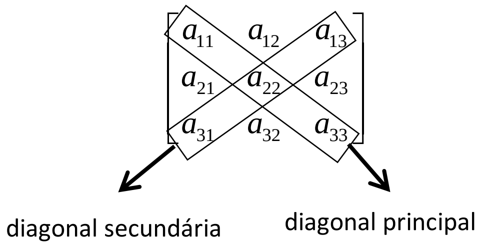
Exemplos:

$$\underbrace{C = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}}_{\substack{\text{matriz quadrada} \\ \text{de ordem 2}}} \qquad \underbrace{D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 3}}_{\substack{\text{matriz quadrada} \\ \text{de ordem 3}}}$$

Uma matriz quadrada possui duas diagonais: a **principal**, composta pelos elementos a_{ij} tal que $i = j$, isto é,

$a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}, \ldots, a_{nn}$, e a **secundária**, composta pelos elementos a_{ij} tal que $i + j = n + 1$, ou $a_{1n}, a_{2,n-1}, a_{3,n-2}, \ldots, a_{n1}$.

A seguir, destacamos as duas diagonais de uma matriz quadrada de ordem 3:



4) **matriz nula**: é toda matriz de ordem $m \times n$ cujos elementos são nulos. Para indicar uma matriz nula utiliza-se a notação $O_{m \times n}$.

Exemplos:

$$O_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad O_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5) **matriz diagonal**: é toda matriz quadrada em que os elementos não pertencentes a diagonal principal são nulos.

Exemplos:

$$\underbrace{K = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{matriz diagonal} \\ \text{de ordem 2}}} \qquad \underbrace{L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{matriz diagonal} \\ \text{de ordem 3}}}$$

6) **matriz identidade**: é toda matriz diagonal em que os elementos da diagonal principal são iguais a 1. Para indicar uma matriz identidade de ordem $\boldsymbol{n}$, utilizamos a notação $\boldsymbol{I_n}$.

Exemplos:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

(Resolva no seu caderno)

1) Indique a ordem (se for um caso especial, identifique também o tipo) das matrizes:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ d) $D = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

e) $E = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ f) $F = \begin{bmatrix} 1{,}3 & 8{,}5 \end{bmatrix}$

g) $G = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$ h) $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

i) $I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

2) Determine quantos elementos possui uma matriz do tipo:

a) 1×6 b) 4×1 c) 3×3 d) 3×5 e) $7 \times n$ f) $p \times 93$

3) É dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ -4 & 4 & -7 \\ \sqrt{2} & -3 & 9 \end{bmatrix}$. Identifique os elementos da:

a) 1ª linha b) 3ª coluna c) 4ª linha d) 2ª coluna

4) Considere a matriz $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Determine o valor dos seguintes elementos:

a) b_{11} b) b_{21} c) b_{12} d) b_{23} e) b_{32} f) b_{22}

5) Uma matriz possui 4 elementos. Quais as ordens possíveis para essa matriz?

6) Determine a matriz $A = (a_{ij})_{2\times3}$ tal que:

a) $a_{ij} = i + 2j$ b) $a_{ij} = i^2 + j$ c) $a_{ij} = 2i - j$ d) $a_{ij} = j - 2i$

7) Determine a matriz $A = (a_{ij})_{2\times2}$ tal que:

a) $a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{se } i = j \\ 0, \text{se } i \neq j \end{cases}$ b) $a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{se } i = j \\ -1, \text{se } i \neq j \end{cases}$

c) $a_{ij} = \begin{cases} i + j, \text{se } i = j \\ -i - j, \text{se } i \neq j \end{cases}$ d) $a_{ij} = \begin{cases} i^2, \text{se } i = j \\ j^2, \text{se } i \neq j \end{cases}$

8) Escreva os elementos da diagonal principal e os da diagonal secundária das matrizes:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \\ 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -5 & 3 \\ 1 & 6 & 7 & 8 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

9) a) Quantos elementos tem uma matriz quadrada de ordem 5?
b) Quantos elementos nulos tem a matriz identidade de ordem 4?
c) Em uma matriz quadrada de ordem n ,quantos elementos não pertencem a diagonal secundária?

10) Escreva as matrizes: a) I_3 b) $O_{2\times 3}$ c) $O_{3\times 3}$ d) I_4

11) Determine x e y para que a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & x-2y \\ y-1 & 2 \end{bmatrix}$ seja diagonal.

MATRIZ TRANSPOSTA

Dada uma matriz A de ordem $m \times n$, chama-se **transposta de** $\boldsymbol{A}$ e indica-se por $\boldsymbol{A^t}$ a matriz dela obtida, trocando-se ordenadamente as linhas pelas colunas de $\boldsymbol{A}$.

Exemplo: Vamos obter a transposta da matriz E :

$$E = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 11 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow E^t = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 11 & -5 \end{bmatrix}$$

Note que a matriz E tem ordem 3×2 e a sua transposta E^t, tem ordem 2×3.

IGUALDADE DE MATRIZES

Duas matrizes, A e B, serão iguais se forem de mesma ordem e se os elementos correspondentes forem iguais. Assim, se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ são matrizes de ordem $m \times n$, então:

$$\boxed{A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \begin{cases} \text{para todo } 1 \le i \le m \\ \text{para todo } 1 \le j \le n \end{cases}}$$

Exemplo: As matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 1-4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2+1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ são iguais, pois ambas possuem ordem 2×2 e os elementos correspondentes são iguais.

OPERAÇÕES COM MATRIZES

1) Adição:

Dadas duas matrizes de mesma ordem, $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, denomina-se **matriz soma** $(A+B)$ a matriz obtida adicionando-se os elementos correspondentes de A e B:

$$\boxed{A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}}$$

em que $1 \le i \le m$ e $1 \le j \le n$.

Exemplo:

São dadas as matrizes: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Para obter $A+B$, adicionamos os elementos de mesma posição:

$$A+B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix} 2+3 & 1+(-2) & 3+1 \\ 0+(-4) & 5+1 & -2+3 \end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix} 5 & -1 & 4 \\ -4 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Observação: Note que $A+B=B+A$ (A adição é comutativa).

Propriedades da adição de matrizes:

Sendo A, B, C e O (matriz nula) matrizes de mesma ordem, valem as propriedades:

- **i.** comutativa: $A+B=B+A$
- **ii.** associativa: $A+(B+C)=(A+B)+C$
- **iii.** elemento neutro: $A+O=O+A=A$

Observação: Chama-se matriz oposta de A a matriz $-A$, cuja soma com A resulta na matriz nula.

2) Subtração:

Dadas duas matrizes de mesma ordem, $A=(a_{ij})_{m\times n}$ e $B=(b_{ij})_{m\times n}$, denomina-se **matriz diferença** $(A-B)$ a matriz obtida subtraindo-se os elementos correspondentes de A e B:

$$\boxed{A-B=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}}$$

em que $1\le i\le m$ e $1\le j\le n$.

Exemplo:

São dadas as matrizes: $A=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$.

Vamos obter $A-B$ e $B-A$:

$$A-B=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \qquad B-A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A-B=\begin{bmatrix} 3-1 & 4-2 \\ 5-(-2) & -3-4 \end{bmatrix} \qquad B-A\begin{bmatrix} 1-3 & 2-4 \\ -2-5 & 4-(-3) \end{bmatrix}$$

$$A-B=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 7 & -7 \end{bmatrix} \qquad B-A=\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -7 & 7 \end{bmatrix}$$

Observação: Note que $A-B\neq B-A$ (A diferença não é comutativa).

3) Multiplicação de um escalar (número real) por uma matriz:

Dada uma matriz $A=(a_{ij})_{m\times n}$ e um número real k, denomina-se **matriz produto do real k $(k\cdot A)$ por A** a matriz obtida multiplicando-se cada um dos elementos de A por k:

$$\boxed{k \cdot A = \left(k \cdot a_{ij}\right)_{m\times n}}$$

em que $1 \le i \le m$ e $1 \le j \le n$.

Exemplo:

Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, vamos calcular $3 \cdot A$:

$$3 \cdot A = 3 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot 1 \\ 3\cdot 3 & 3\cdot 0 \\ 3\cdot(-1) & 3\cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 9 & 0 \\ -3 & 12 \end{bmatrix}$$

Propriedades da multiplicação de número real por matriz

i. $1 \cdot A = A$
ii. $(-1) \cdot A = -A$
iii. $p \cdot O = O \ (p \in \mathbb{R})$
iv. $0 \cdot A = O$
v. $p \cdot (A + B) = p \cdot A + p \cdot B \ (p \in \mathbb{R})$
vi. $(p+q) \cdot A = p \cdot A + q \cdot B \ \ (p, q \in \mathbb{R})$
vii. $p \cdot (q \cdot A) = (p \cdot q) \cdot A \ \ (p, q \in \mathbb{R})$

HORA DE EXERCITAR!

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

(Resolva no seu caderno)

12) Construa a matriz transposta de:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ c) $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e) $E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

13) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, encontre: a) A^t b) $\left(A^t\right)^t$

14) Chama-se ***matriz simétrica*** toda matriz quadrada que é igual a sua transposta. Determine x e y para que a matriz $M = \begin{bmatrix} 3 & 1 & x \\ 2y & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ seja simétrica.

15) Determine os valores de p e q, sabendo que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & q \\ p & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ é simétrica.

16) Determine x e y tais que:

a) $\begin{bmatrix} x \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ y \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} x+y & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & x-y \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} x^2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 1 & 3 \\ 0 & -1 & y^2 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 0 & x^2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2x \\ y^2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

17) São dadas as seguintes matrizes: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$. Encontre a matriz X em cada caso:

a) $X + A = 2B - C$ b) $X - 2A = 3B - 4C$

c) $X + A = B - C$ d) $X + 2A = 3C - 2B$

18) São dadas as matrizes: $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Resolva as equações matriciais:

a) $A - B + 2X - C = 0$ b) $2X + A = 3B - \frac{1}{2}C$

c) $2(X + A) = \frac{1}{2}(2B - C)$ d) $X + 2A^t = 3(B + C)^t$

19) Dadas as matrizes: $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, calcule:

a) $A + B - C$ b) $B + C$ c) $A - B$ d) $B - A$

e) $2A$ f) $-3C$ g) $\frac{1}{2}B$ h) $2A - 3B + C$

Dúvidas fazem parte da aprendizagem…

20) Considere as matrizes: $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$, determine:

a) A^t b) B^t c) $A^t + B^t$ d) $(A + B)^t$.

Observação: Compare $(A + B)^t$ e $(A^t + B^t)$.

MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

Duas matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{jk})$, de tipos (ordens) $m \times n$ e $n \times p$, respectivamente, pode-se obter a **matriz produto** $C = A \cdot B$, do tipo $m \times p$. Para que o produto $A \cdot B$ seja possível, é necessário que o número de colunas de A seja igual ao número de linhas de B.

$$\boxed{A_{m\times n} \cdot B_{n\times p} = C_{m\times p}}$$

Por exemplo, considere as matrizes: $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\3 & 1 & 1\end{bmatrix}_{2\times 3}$ e $B=\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}_{3\times 1}$.

O produto $A\cdot B$ é possível, pois o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B, mas o produto $B\cdot A$ não é possível:

$$\underbrace{A_{2\times 3}\cdot B_{3\times 1}}_{\text{possível}} \qquad \underbrace{B_{3\times 1}\cdot A_{2\times 3}}_{\text{não possível}}$$

Cada elemento C_{ik} da matriz produto C é dado pela soma dos produtos de cada elemento da linha i de A pelo elemento correspondente da coluna k de B:

$$\boxed{\begin{aligned} & C=A\cdot B=\left(c_{ik}\right)_{m\times p} \\ & c_{ik}=a_{i1}\cdot b_{1k}+a_{i2}\cdot b_{2k}+\cdots+a_{in}\cdot b_{nk}\end{aligned}}$$

Note que, no produto de matrizes, multiplica-se cada elemento de uma linha pelo elemento correspondente de uma coluna e, em seguida, somam-se esses produtos.

Exemplos:

1) Considere as matrizes $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\-1 & 3\end{bmatrix}_{2\times 2}$ e $B=\begin{bmatrix}3 & 0 & 5\\1 & 4 & 0\end{bmatrix}_{2\times 3}$. É possível obter a matriz produto $C=A\cdot B$, pois o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B. A matriz produto C será então do tipo 2×3. Veja a seguir as etapas para o cálculo dos elementos de C:

1ª linha X 1ª coluna	$\begin{bmatrix}2 & 1\\-1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0 & 5\\1 & 4 & 0\end{bmatrix}$	$2\cdot 3+1\cdot 1=7$	$\begin{bmatrix}7 & & \\ & & \end{bmatrix}$
1ª linha X 2ª coluna	$\begin{bmatrix}2 & 1\\-1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0 & 5\\1 & 4 & 0\end{bmatrix}$	$2\cdot 0+1\cdot 4=4$	$\begin{bmatrix}7 & 4 & \\ & & \end{bmatrix}$
1ª linha X 3ª coluna	$\begin{bmatrix}2 & 1\\-1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0 & 5\\1 & 4 & 0\end{bmatrix}$	$2\cdot 5+1\cdot 0=10$	$\begin{bmatrix}7 & 4 & 10\\ & & \end{bmatrix}$
2ª linha X 1ª coluna	$\begin{bmatrix}2 & 1\\-1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0 & 5\\1 & 4 & 0\end{bmatrix}$	$(-1)\cdot 3+3\cdot 1=0$	$\begin{bmatrix}7 & 4 & 10\\0 & & \end{bmatrix}$
2ª linha X 2ª coluna	$\begin{bmatrix}2 & 1\\-1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0 & 5\\1 & 4 & 0\end{bmatrix}$	$(-1)\cdot 0+3\cdot 4=12$	$\begin{bmatrix}7 & 4 & 10\\0 & 12 & \end{bmatrix}$
2ª linha X 3ª coluna	$\begin{bmatrix}2 & 1\\-1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0 & 5\\1 & 4 & 0\end{bmatrix}$	$(-1)\cdot 5+3\cdot 0=-5$	$\begin{bmatrix}7 & 4 & 10\\0 & 12 & -5\end{bmatrix}$

Logo, $C = A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 10 \\ 0 & 12 & -5 \end{bmatrix}$.

2) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, vamos calcular $C = A \cdot B$. Esse produto é possível, pois o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B. Como A e B são do tipo 2×2, C será do tipo 2×2. Vamos então calcular os elementos de C:

c_{11}: 1ª linha de A x 1ª coluna de B

$$\begin{bmatrix} \boxed{2 \quad 0} \\ 1 \quad 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix} \end{bmatrix} \quad c_{11} = 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \Rightarrow c_{11} = 2$$

c_{12}: 1ª linha de A x 2ª coluna de B

$$\begin{bmatrix} \boxed{2 \quad 0} \\ 1 \quad 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix}} \end{bmatrix} \quad c_{12} = 2 \cdot 4 + 0 \cdot 1 \Rightarrow c_{12} = 8$$

c_{21}: 2ª linha de A x 1ª coluna de B

$$\begin{bmatrix} 2 \quad 0 \\ \boxed{1 \quad 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix} \end{bmatrix} \quad c_{21} = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \Rightarrow c_{21} = 1$$

c_{22}: 2ª linha de A x 2ª coluna de B

$$\begin{bmatrix} 2 \quad 0 \\ \boxed{1 \quad 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix}} \end{bmatrix} \quad c_{22} = 1 \cdot 4 + 3 \cdot 1 \Rightarrow c_{22} = 7$$

Logo, $C = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$.

MATRIZ INVERSA

Dada uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_{n \times n}$, dizemos que A é inversível se existir uma matriz $B = (b_{ij})_{n \times n}$ tal que:

$$\boxed{A \cdot B = B \cdot A = I_n}$$

Nesse caso, dizemos que B é a matriz inversa de A e indicamos $B = A^{-1}$.

Exemplo:

Vamos determinar a matriz inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$. Para isso, consideramos $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e efetuamos $A^{-1} \cdot A = I_2$:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3a + 5b & a + 2b \\ 3c + 5d & c + 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Daí vem os seguintes sistemas:

$$(\mathrm{I})\begin{cases} 3a+5b=1 \\ a+2b=0 \;\; \times(-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a+5b=1 \\ \underline{-3a-6b=0} \end{cases} +$$

$$-b=1 \;\Rightarrow\; b=-1 \text{ e } a=2$$

e

$$(\mathrm{II})\begin{cases} 3c+5d=0 \\ c+2d=1 \;\; \times(-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3c+5d=0 \\ \underline{-3c-6d=-3} \end{cases} +$$

$$-d=-3 \;\Rightarrow\; b=3 \text{ e } a=-5$$

Logo, $A^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$.

HORA DE EXERCITAR!

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

(Resolva no seu caderno)

21) Sendo $A_{2\times2}$, $B_{2\times4}$ e $C_{4\times1}$, determine a ordem das matrizes produto, se existirem:

a) $A\cdot B$ b) $B\cdot C$ c) $B\cdot A$

d) $A\cdot A$ e) $C\cdot B$ f) $C\cdot C$

22) Efetue cada um dos produtos, se existirem:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

23) São dadas as matrizes: $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Calcule $A\cdot B$ b) Calcule $B\cdot A$ c) Compare $A\cdot B$ com $B\cdot A$

24) Dadas as matrizes: $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$, calcule:

a) $A\cdot B$ b) A^2 c) B^2 d) A^2-B^2

e) $(A+B)\cdot(A-B)$ f) $(A+B)^2$ g) $A^2+2A\cdot B+B^2$

Nota: A^2 é o mesmo que $A\cdot A$.

25) Determine a matriz X tal que:

a) $X\cdot\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 8 & 14 \\ 7 & 16 \end{bmatrix}$

d) $X \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 1 \\ -12 & -3 \end{bmatrix}$

26) Determine a matriz X tal que:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $X \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $X \cdot \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

27) Dadas as matrizes: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 & 3 \end{bmatrix}$, determine a matriz X tal que $A^t \cdot X = B^t$.

28) Determine a matriz inversa de cada uma das matrizes:

a) $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

29) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, determine a matriz X tal que $X + A^{-1} = A^t$.

30) Calcule $\left(A + A^{-1}\right)^2$, sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.