E.E.M. Vereador Oscar Manoel da Conceição
Unidade 3: Determinantes – Matemática - 2ª série
Ano letivo 2019 (2º trimestre) - Prof. Marcos Martins

DETERMINANTES

Dada uma matriz quadrada de ordem ***n***, podemos associar a ela, mediante certas operações, um número real chamado **determinante da matriz**.

$$\boxed{\text{Notação: } \det A \text{ ou } |A|}$$

Determinante de matrizes de 1ª, 2ª e 3ª ordens

- **Matriz 1 x 1**

Dada a matriz $A=[a_{11}]$, o seu determinante é o próprio número a_{11}:

$$\boxed{\det A = |a_{11}| = a_{11}}$$

Exemplo:

Para a matriz $A=[-3]$,temos: $\det A = -3$.

- **Matriz 2 x 2**

Dada a matriz $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, o seu determinante é igual ao produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$a_{12}a_{21} \qquad a_{11}a_{22}$$

$$\boxed{\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Exemplo:

O determinante da matriz $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ é:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot 5 - 2\cdot 4 = 15 - 8 = 7$$

$$2\cdot 4 \qquad 3\cdot 5$$

- **Matriz 3 x 3**

Dada a matriz $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, o seu determinante pode ser calculado por meio de uma regra prática, denominada **regra de Sarrus**.

Acompanhe as etapas que compõem essa regra:

i) Repetem-se, à direita da matriz, as duas primeiras colunas:

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

ii) Efetuam-se os produtos dos elementos indicados, **conservando-se os sinais**:

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right. \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$a_{12}a_{23}a_{31}$$

$$a_{11}a_{22}a_{33}$$

iii) Efetuam-se os produtos dos elementos indicados, **trocando-se os sinais**:

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right. \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$-a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}$$

iv) Somam-se os produtos obtidos:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Exemplos:

1) O determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ é:

$$\det A = \left|\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{matrix}$$

$$-2 \quad 0 \quad -24 \qquad\qquad 4 \quad 0 \quad 3$$

$$\det A = 4 + 0 + 3 - 2 - 0 - 24 \Rightarrow \det A = -19$$

2) Dada a matriz $A=\begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, vamos calcular $\det A$:

$$\det A = \left|\begin{matrix} -2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} -2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{matrix}$$

$$30 \quad -2 \quad -4 \qquad\qquad -4 \quad -5 \quad -12$$

$$\det A = -4-5-12+30-2-4 \Rightarrow \det A = 3$$

Determinante de matrizes de ordem *n*

O determinante de uma matriz $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$, com $n\geq 2$, pode ser obtido a partir do conceito de **cofator** de um elemento da matriz A.

Dada uma matriz $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$, chama-se **cofator do elemento** a_{ij} o número $A_{ij}=\left(-1\right)^{i+j}\cdot D_{ij}$, em que D_{ij} é o determinante da matriz que se obtém de A eliminando-se a linha i e a coluna j.

Exemplo:

Na matriz $A=\begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, vamos determinar o cofator do elemento a_{22}.

- Inicialmente obtemos D_{22} eliminando a linha 2 e a coluna 2 da matriz A:

$$\begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & -1 \\ 7 & -2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \longleftarrow \text{linha } 2 \\ \\ \end{array} \\ \uparrow & \\ \text{coluna } 2 & \end{array}$$

- O cofator de a_{22} é o número: $A_{22}=\left(-1\right)^{2+2}\cdot D_{22}$.

$$A_{22}=\left(-1\right)^{4}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 0 \end{vmatrix}=1\cdot\left(-28\right)\Rightarrow A_{22}=-28.$$

O determinante da matriz A de ordem ***n***, com $n\geq 2$, é igual à soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) por seus respectivos cofatores.

$$\boxed{\det A = a_{i1}\cdot A_{i1}+a_{i2}\cdot A_{i2}+\cdots+a_{in}\cdot A_{in}}$$

Exemplos:

1) Vamos calcular o determinante da matriz $A=\begin{bmatrix}0&1&2\\1&3&1\\2&1&2\end{bmatrix}$:

$$A=\begin{bmatrix}\boxed{0\quad 1\quad 2}\\1\quad 3\quad 1\\2\quad 1\quad 2\end{bmatrix}$$

$$\det A=a_{11}\cdot A_{11}+a_{12}\cdot A_{12}+a_{13}\cdot A_{13}$$

$$\det A=0\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3&1\\1&2\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1&1\\2&2\end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1&3\\2&1\end{vmatrix}$$

$$\det A=0\cdot(6-1)-1\cdot(2-2)+2\cdot(1-6)$$

$$\det A=0-0+2\cdot(-5)$$

$$\det A=-10$$

2) Na matriz $A=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\2&1&3&0\\0&1&2&1\\1&0&1&2\end{bmatrix}$, vamos calcular $\det A$:

$$A=\begin{bmatrix}\boxed{0\quad 1\quad 1\quad 0}\\2\quad 1\quad 3\quad 0\\0\quad 1\quad 2\quad 1\\1\quad 0\quad 1\quad 2\end{bmatrix}$$

$$\det A=a_{11}\cdot A_{11}+a_{12}\cdot A_{12}+a_{13}\cdot A_{13}+a_{14}\cdot A_{14}$$

Como $a_{11}=0$ e $a_{14}=0$, podemos escrever: $\det A=a_{12}\cdot A_{12}+a_{13}\cdot A_{13}$

Assim, vem:

$$\det A=a_{12}\cdot A_{12}+a_{13}\cdot A_{13}$$

$$\det A=1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&3&0\\0&2&1\\1&1&2\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2&1&0\\0&1&1\\1&0&2\end{vmatrix}$$

$$\det A=-1\cdot(8+3-2)+1\cdot(4+1)$$

$$\det A=-1\cdot(9)+1\cdot(5)$$

$$\det A=-4$$

Propriedades dos determinantes

Para uma matriz quadrada A, de ordem ***n***, podem ser demonstradas algumas propriedades que simplificam o cálculo de seu determinante.

1ª Propriedade:

Se A tem uma fila com todos os elementos nulos, seu determinante é nulo.

Exemplo:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 4\end{bmatrix}\Rightarrow \det A=0$$

2ª Propriedade:

Se A tem duas filas paralelas proporcionais, seu determinante é nulo.

Exemplos:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 5\\ -6 & 1 & 0\\ 4 & 6 & 10\end{bmatrix}\Rightarrow \det A=0 \qquad B=\begin{bmatrix}2 & -5 & 2\\ 3 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow \det B=0$$

3ª Propriedade:

Se trocarmos entre si a posição de duas filas paralelas de A, obtemos uma matriz A', tal que $\det A'=-\det A$.

Exemplo:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & -2 & 5\\ 4 & 0 & 3\end{bmatrix}\Rightarrow \det A=24 \qquad A'=\begin{bmatrix}4 & 0 & 3\\ 3 & -2 & 5\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow \det A'=-24$$

4ª Propriedade:

Se multiplicarmos os elementos de uma fila de A por um número real ***k***, obtemos uma matriz A', tal que $\det A'=k\cdot\det A$.

Exemplos:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 2 & 1\\ 0 & -3 & 1\\ -3 & 0 & 2\end{bmatrix}\Rightarrow \det A=-27$$

- Multiplicando a 1ª linha por 2 obtemos:

$$A'=\begin{bmatrix}4 & 4 & 2\\ 0 & -3 & 1\\ -3 & 0 & 2\end{bmatrix}\Rightarrow \det A'=2\cdot\det A=-54$$

$$B=\begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ -1 & 4 & 2\end{bmatrix}\Rightarrow \det B=-7$$

- Vamos calcular o determinante de $2B$:

$$2B=\begin{bmatrix}2 & 6 & 2\\ 4 & -2 & 0\\ -2 & 8 & 4\end{bmatrix}\Rightarrow \det(2B)=2^3\cdot\det B=-56$$

<u>Observe que</u>: $\det(2B)=2^3\cdot\det B$

Para uma matriz de ordem ***n***, temos:

$$\det(k\cdot A)=k^n\cdot\det A$$

5ª Propriedade:

O determinante de uma matriz é igual ao determinante de sua transposta.

$$\boxed{\det A = \det A^t}$$

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 43 \qquad A^t = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A^t = 43$

6ª Propriedade:

O determinante do produto de duas matrizes quadradas de mesma ordem é igual ao produto dos determinantes dessas matrizes.

$$\boxed{\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B}$$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 5;\ B = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det B = 2$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A \cdot B) = 10$$

Observe que $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

7ª Propriedade:

Se somarmos a uma fila de A uma outra fila previamente multiplicada por um número real, obtemos uma matriz A', tal que $\det A' = \det A$.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 15$$

- Multiplicando a terceira linha por 2 e adicionando à primeira, obtemos A':

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A' = 15.$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

(Resolva no seu caderno)

HORA DE EXERCITAR!

1) Calcule o determinante das seguintes matrizes:

a) $A = [5]$ b) $B = [\pi]$ c) $C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ d) $D = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \sqrt{8} \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

Dúvidas fazem parte da aprendizagem…

2) Calcule o determinante das seguintes matrizes:

a) $A=\begin{bmatrix}1&2&0\\3&4&2\\1&6&3\end{bmatrix}$ b) $B=\begin{bmatrix}1&3&2\\5&2&3\\4&0&1\end{bmatrix}$ c) $C=\begin{bmatrix}4&3&1\\2&1&5\\1&6&2\end{bmatrix}$

3) Calcule os determinantes:

a) $|\,2\,|$ b) $|-3|$ c) $\begin{vmatrix}1&2\\4&3\end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix}4&-3\\1&4\end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix}2&-3\\1&5\end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix}\frac{2}{3}&1\\0&3\end{vmatrix}$

4) Calcule os determinantes aplicando a regra de Sarrus:

a) $\begin{vmatrix}2&3&1\\4&-2&1\\2&1&1\end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix}1&2&3\\3&2&1\\0&4&3\end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix}-2&1&3\\4&-3&1\\2&4&1\end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix}5&0&-1\\2&3&4\\1&2&3\end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix}1&2&0\\2&4&1\\-3&-6&0\end{vmatrix}$

5) Determine o conjunto solução das seguintes equações:

a) $\begin{vmatrix}3&x\\2&4\end{vmatrix}=0$ b) $\begin{vmatrix}-1&3\\x&9\end{vmatrix}=0$ c) $\begin{vmatrix}2x&-4\\8&3\end{vmatrix}=38$ d) $\begin{vmatrix}x+1&3\\1&2\end{vmatrix}=0$

6) Determine o conjunto solução das equações, aplicando a regra de Sarrus:

a) $\begin{vmatrix}1&x&1\\-2&-4&2\\4&8&3\end{vmatrix}=0$ b) $\begin{vmatrix}-3&4&x\\5&0&0\\2&1&2\end{vmatrix}=0$ c) $\begin{vmatrix}0&x&6\\1&2&4\\-3&-1&-2\end{vmatrix}=-10$ d) $\begin{vmatrix}2x&-3&0\\0&1&-2\\3&-1&4\end{vmatrix}=26$

7) (FAAP – SC) Calcule o determinante da matriz 2×2, cujos elementos são: $\begin{cases}a_{ij}=i+2j,\ \text{se } i\geq j\\ a_{ij}=i^2-j,\ \text{se } i<j\end{cases}$.

8) (UFPR) Dadas as matrizes $A=\begin{bmatrix}2&-1\\-2&2\\0&1\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}-1&2&3\\2&1&1\end{bmatrix}$ e sendo $N=50+\det(A\cdot B)$, encontre o valor de N.

9) (UFCE) Calcule o determinante da matriz P^2, sendo $P=\begin{bmatrix}\sqrt{2}&-1&1\\\sqrt{2}&1&-1\\0&\sqrt{2}&\sqrt{2}\end{bmatrix}$.

10) Resolva a equação: $\begin{vmatrix}1-x&1&1\\1&1-x&1\\1&1&1-x\end{vmatrix}=0$.

11) (UFCE) Se o determinante da matriz $\begin{bmatrix}1&1&3k\\3k&1&1\\9k^2&3k&1\end{bmatrix}$ é igual a 280, determine o valor de $3k^2-2k$.

12) (FGV – SP) A solução da equação $\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 0 \ \left(x \in \mathbb{R}\right)$ é:

a) não tem solução real

b) $x = \sqrt{3}$

c) $x = \pm 1$

d) $x = 1$

e) $x = -1$

13) Calcule os seguintes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

14) Determine o conjunto solução das equações:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & x & -1 \\ x & 1 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 6$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -x \\ 3 & 1 & x & -2 \\ 4 & 0 & 1 & x \end{vmatrix} = -39$

15) Se A é uma matriz quadrada 3×3 com $\det A = 5$, calcular o determinante da matriz B onde $B = 2A$.

16) Calcular utilizando propriedades dos determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & -2 & 6 \\ 7 & 1 & -5 & 2 \\ 8 & 4 & 1 & 8 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ 2 & 0 & 0 & -x \\ 2x & 2y & 2z & 2t \\ 4 & 0 & 1 & x \end{vmatrix}$

17) Sendo $\begin{vmatrix} x & y & z \\ r & s & t \\ a & b & c \end{vmatrix} = 4$, calcule:

a) $\begin{vmatrix} x & r & a \\ y & s & b \\ z & t & c \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 3r & 3s & 3t \\ -a & -b & -c \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} r & x & a \\ s & y & b \\ t & z & c \end{vmatrix}$