EQUAÇÕES DO 2º GRAU

1) Classificação

Uma equação do tipo: $ax^2 + bx + c = 0$, é denominada <u>equação completa</u> do segundo grau. Na equação, a, b e c, são números reais. A equação do 2º grau é dita <u>incompleta</u> quando:

a) $c = 0$, a equação fica: $ax^2 + bx = 0$;
b) $b = 0$, a equação fica: $ax^2 + c = 0$;
c) $b = c = 0$, a equação fica: $ax^2 = 0$.

É evidente que <u>a não pode ser nulo</u>, pois aí não teríamos mais uma equação do 2º grau.

2) Resolução de uma equação do 2º grau

O número de raízes de uma equação é sempre igual ao grau da equação. Assim, uma equação do 2º grau deve necessariamente ter 2 (duas) raízes. Considerando a equação genérica $ax^2 + bx + c = 0$ a fórmula que permite a determinação de suas raízes é:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Fórmula de Bháskara

A quantidade $b^2 - 4ac$ que aparece sob o radical é denominada <u>discriminante</u> e simbolizada pela letra grega Δ (delta):

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

A análise do discriminante fornecerá informações importantes sobre as raízes da equação como será apresentado na sequência. Considerando o discriminante, a fórmula resolutiva pode ser escrita:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

Exemplos:

I. Resolver a equação $x^2 - 8x + 15 = 0$.
Comparando com a equação genérica $ax^2 + bx + c = 0$, temos:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -8 \\ c = 15 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \Delta = b^2 - 4ac \\ \Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15 = 64 - 60 = 4 \end{array}$$

Substituindo na fórmula resolutiva:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm 2}{2}$$

Considerando o sinal (+) teremos uma das raízes:

$$x_1 = \frac{8 + 2}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Considerando o sinal (–) teremos a outra raiz:

$$x_2 = \frac{8 - 2}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

II. Resolver a equação: $x^2 - 8x + 16 = 0$.

$\begin{cases} a = 1 \\ b = -8 \\ c = 16 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \Delta = b^2 - 4ac \\ \Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 64 - 64 = 0 \end{array}$

Substituindo na fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \frac{8}{2} = 4$$

Neste caso obtivemos apenas um valor para x. Como uma equação do 2º grau DEVE TER DUAS RAÍZES e apenas o valor 4 satisfaz a igualdade, as duas raízes devem ser iguais a 4. Assim:

$$\boldsymbol{x_1 = 4} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{x_2 = 4}$$

III. Resolver a equação: $x^2 + x + 2 = 0$.

$\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \Delta = b^2 - 4ac \\ \Delta = (1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 - 8 = -7 \end{array}$

Substituindo na fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2 \cdot 1}$$

Como o discriminante é negativo e não satisfaz raiz quadrada de um número negativo no campo dos números reais, as duas raízes dessa equação serão IMAGINÁRIAS (você verá quando estudar Números Complexos na 3ª série – EM).

3) Relação entre o discriminante e as raízes

Considerando os três exemplos anteriores observamos que:

- **i.** No exemplo "a" o discriminante foi um valor positivo (4) e obteve-se duas raízes reais e diferentes (5 e 3).
- **ii.** No exemplo "b" o discriminante foi nulo (0) e obteve-se duas raízes reais e iguais (4 e 4).
- **iii.** No exemplo "c" o discriminante foi negativo (– 7) e obteve-se duas raízes imaginárias (raízes que não pertencem ao conjunto dos números reais).

Então, os tipos de raízes de uma equação do 2º grau podem ser previstos pelo discriminante. Quando:

$\Delta > 0$ tem-se duas raízes reais e diferentes
$\Delta = \mathbf{0}$ tem-se duas raízes reais e iguais
$\Delta < 0$ tem-se duas raízes imaginárias (não reais)

Exemplo:

IV. Prever as raízes da equação $-x^2 + 7x - 12 = 0$ e depois determiná-las.

<u>OBSERVAÇÃO</u>: Quando $\underline{a}$ é negativo é conveniente multiplicar ambos os membros da equação por -1.

✏ Assim, a equação fica: $x^2 - 7x + 12 = 0$.

$\begin{cases} a = 1 \\ b = -7 \\ c = 12 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \Delta = b^2 - 4ac \\ \Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 49 - 48 = 1 \end{array}$

✐ Como $\Delta = 1 > 0 \Rightarrow$ As duas raízes são reais e diferentes.
✐ Resolvendo:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 1}{2}$$

✐ Assim:

$$x_1 = \frac{7+1}{2} = \frac{8}{2} = 4 \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{7-1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

✐ Resposta: $x_1 = 4$ e $x_2 = 3$.

4) Soluções particulares para as equações incompletas do 2º grau

I. Equações do tipo: $\boldsymbol{ax^2 + c = 0}$

Isola-se x no 1º membro utilizando as operações inversas.

Exemplo: Resolver a equação $2x^2 - 32 = 0$.

$$\begin{aligned} 2x^2 - 32 &= 0 \\ 2x^2 &= 32 \\ x^2 &= \frac{32}{2} \\ x^2 &= 16 \\ x &= \pm\sqrt{16} = \pm 4 \quad \therefore \quad x_1 = -4 \quad \text{e} \quad x_2 = 4. \end{aligned}$$

Observação: Nas equações incompletas em que $b = 0$ as raízes são sempre simétricas.

II. Equações do tipo: $\boldsymbol{ax^2 + bx = 0}$

Fatora-se x: $x(ax + b) = 0$.

Temos agora o produto de dois fatores x e $(ax + b)$ que devem ser igual a zero. Isto acontecerá se x for igual a zero ou $ax + b$ for igual a zero. Como em qualquer das hipóteses a igualdade será verificada podemos admitir as duas. Ou seja:

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad ax + b = 0.$$

Um valor para x já está determinado: $x_1 = 0$.
O outro valor obtém-se da equação $ax + b = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{b}{a}$.

Observação: Nas equações incompletas em que $c = 0$ uma das raízes sempre é nula.

Exemplo: Resolver a equação $3x^2 - 5x = 0$.

Fatorando x: $x(3x - 5) = 0$.
Assim:

$$x_1 = 0 \qquad \text{e} \qquad 3x - 5 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{5}{3}.$$

III. Equações do tipo: $\boldsymbol{ax^2 = 0}$

Neste caso as raízes são sempre iguais a zero.

Exemplo: Resolver a equação $3x^2 = 0$.

$$x_1 = 0 \quad \text{e} \quad x_2 = 0.$$

5) Relações entre coeficientes e raízes

Se, em particular, tivermos na equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, $a = 1$, a mesma ficará $x^2 + bx + c = 0$. Pode-se demonstrar que as raízes da equação, neste caso, serão tais que:

$$\boxed{\begin{array}{c} x_1 + x_2 = -b \\ x_1 \cdot x_2 = c \end{array}}$$

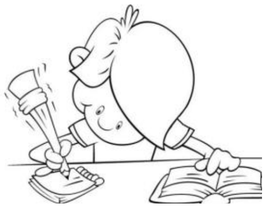
Essas relações permitirão a solução da equação com relativa simplicidade pois, para determinar as raízes basta procurar dois números que <u>multiplicados resultam c e somados resultam b com o sinal trocado</u>.

<u>Exemplos</u>:

1) Determinar "mentalmente" as raízes da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$.
   <u>Resolução</u>: As raízes serão dois números que multiplicados resultam 6 (c) e somados resultam 5 $(-b)$.
   Tais números são 2 e 3. (VERIFIQUE!)

2) Determinar "mentalmente" as raízes da equação $x^2 + x - 20 = 0$.
   <u>Resposta</u>:
   $\begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = 4 \end{cases}$, pois $(-5) \cdot (4) = -20 = c$ e $-5 + 4 = -1 = -b$.

HORA DE EXERCITAR!



EXERCÍCIOS

111) Determinar as raízes das seguintes equações:

a) $x^2 - 7x + 6 = 0$ b) $x^2 + 3x - 28 = 0$ c) $3x^2 - 5x + 2 = 0$
d) $16x^2 + 16x + 3 = 0$ e) $4x^2 - 16 = 0$ f) $2x^2 - 18 = 0$
g) $3x^2 = 5x$ h) $2x^2 + 8x = 0$ i) $(2x - 3)^2 = (4x - 3)^2$

112) Prever a natureza das raízes das equações:

a) $2x^2 - 3x + 1 = 0$ b) $x^2 + x + 3 = 0$ c) $2x^2 - 4x + 2 = 0$

113) Determinar mentalmente as raízes das equações:

a) $x^2 - 6x + 5 = 0$ b) $x^2 + 2x - 15 = 0$ c) $x^2 - 4x - 12 = 0$
d) $x^2 - 10x + 21 = 0$ e) $x^2 + 5x - 50 = 0$

114) Resolver as seguintes equações:

a) $ax^2 = b$ b) $x(x - 1) = x(2x - 1) - 18$

115) (MACKENZIE) A equação $ax^2 + x + 1 = 0$ tem duas soluções reais e distintas se e somente se:

a) $a > \frac{1}{4}$
b) $0 \le a \le \frac{1}{4}$
c) $a \ge -\frac{1}{4}$ e $a \ne 0$
d) $a < -\frac{1}{4}$ e $a \ne 0$
e) a é um número real não nulo

<u>Lembrete</u>: se as raízes são reais e distintas então $\Delta > 0$.